RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B36 (2012), 141–149

Affine Hecke 代数の表現論と Springer 表現

(Representation theory of affine Hecke algebras and Springer representations)

By

加藤周 (Syu Kato)*

Abstract

この論説は我々の論文の中に出てくる Springer 表現の構造の部分を抽出して survey したものです。

This article collects and surveys arguments on structures of Springer representations in our papers.

前口上

Springer 対応とは複素数体上の簡約群 G の Weyl 群の既約表現をある多様体のコホモロジー (の最高次部分) として実現する対応である。また、実は最高次以外の部分も Weyl 群の表現になっており、それらも含めて考えると有限 Chevalley 群の冪単指標 (Deligne-Lusztig 指標の理論においてこれ以上小さな群には押し付けられない部分) が分かるという重要な性質がある ([Sh04] 等を参照)。(この論説では全次数のコホモロジーをまとめ上げて A 群と呼ばれる有限群の作用で切り出したものを Springer 表現と呼ぶ事にする。)

そして (群 G が)A 型の場合については Springer 表現は De Concini-Procesi によりかなり詳細な構造が調べられている。しかし他の古典型、例えば B 型、C 型の場合についてはあまり良くわからないとされてきた。ところが、我々の exotic Deligne-Langlands 対応の記述を用いるといろいろなことが分かる。しかし、我々の論文ではそもそも Springer 表現は黒子役で何かが分かった事すら外からでは見えづらいのではないかと思いこの機会に少し書いてみた。

尚、(我々の結果以外の) この論説全般の内容に関する教科書としては Chriss-Ginzburg [CG97] を挙げておく。

Received November 30, 2009. Accepted February 11, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 20C08, 20G05
*京都大学大学院理学研究科数学教室 (Department of Mathematics, Kyoto University), 〒 606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町
E-mail: syuchan@math.kyoto-u.ac.jp

§1. Springer 表現

Springer 対応

複素数体上の簡約群 G を取り、その冪単部分 G_{uni} を考える。Springer 同型により G_{uni} は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の冪零元からなる部分集合 $\mathcal{N}$ と G 作用込みで同型になる。この時、$x \in \mathcal{N}$ は旗多様体 G/B 上のベクトル場を定めていると思える。さて、x の零点集合を $\mathcal{B}_x$ で表すとこれは一般には既約でも smooth でもない代数多様体になる。W を G の Weyl 群とすると以下が成立する。

Theorem 1.1 (Springer 対応)**.** 任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して以下が成立*:*

1. 全ての $\mathcal{B}_x$ の既約成分は同じ次元 d_x を持つ。

2. $A_x := \mathsf{Stab}_G(x)/\mathsf{Stab}_G(x)^\circ$ とおくと *(*ただし $\mathsf{Stab}_G(x)^\circ$ は点 x の G 作用における固定化部分群 $\mathsf{Stab}_G(x)$ の単位元を含む連結成分 *)*、A_x は $\mathcal{B}_x$ の既約成分の入れ替えとして作用する。

3. 各整数 $i \geq 0$ について $H^{2i+1}(\mathcal{B}_x) = \{0\}$ かつ $H^{2i}(\mathcal{B}_x)$ には W-表現の構造が入る。

4. 各 A_x の既約表現 ξ に対して A_x 表現 M の ξ-部分を M_ξ と表すと $L_{(x,\xi)} := H^{2d_x}(\mathcal{B}_x)_\xi$ は $\{0\}$ または既約 W-表現となる。

5. 次の全単射が存在

$$\{(x,\xi) \mid x \in \mathcal{N}, \xi \in \mathsf{Irr}A_x,\ s.t.\ L_{(a,\xi)} \neq \{0\}\}/\sim \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathsf{Irr}W$$

ただし $(x,\xi) \sim (x',\xi')$ とはある $g \in G$ により $x = \mathrm{Ad}(g)x'$ かつ $g^*\xi' = \xi$ となる事と定める。また、$\mathsf{Irr}H$ で群 H の既約表現の同型類集合を表している。

定理の主張の 4 番では構成から容易に分かる帰結である $\mathcal{B}_x \cong \mathcal{B}_{\mathrm{Ad}(g)x}$ が任意の $g \in G$ に対して成立する為、特に $(x,\xi) \sim (x',\xi')$ が成立するならば $L_{(x,\xi)} \cong L_{(x,\xi)}$ が W-表現として成立する事を使っている。

ここで $L_{(x,\xi)} = \{0\}$ となるようなペア (x,ξ) は存在し、尖点的局所系と呼ばれる $\mathcal{N}$ 上の G-同変局所系に対応する事が知られている。(もしも G が A 型であれば常に $L_{(x,\xi)} = \{0\}$ と $\xi \neq 1$ が同値である。しかし、実はこの時 G が半単純なら $A_x = Z(G)$ なので G をさらに随伴群とするとそもそも ξ の非自明なチョイスは存在しない。) 尖点的局所系から出発して Springer 表現に現れないようなペア (x,ξ) を利用する事で W よりもランクの小さい Weyl 群に関する定理 1.2 もどきを構成する事ができる。これがいわゆる一般 Springer 対応 [Lu84] であり、我々の結果の類似は一般 Springer 対応に対しても存在するが、この論説では取り扱わない。

exotic Springer 対応

さて、$G = Sp(2n, \mathbb{C})$ とする。この時ベクトル表現 $V_1 = \mathbb{C}^{2n}$ とその 2 回ウェッジ積 $V_2 = \wedge^2 V_1$ を取り、その直和 $\mathbb{V} := V_1 \oplus V_2$ を考える。T を G の極大トーラスとして、$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ を T の指標群 $X(T)$ の基底であって (G, T) に関するルート系 R とその正ルート系 R^+ が

$$R = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{\pm 2\epsilon_i\}_{i=1}^n \supset R^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{2\epsilon_i\}_{i=1}^n$$

によって与えられるものを取る。その時 $\mathbb{V}^+$ で $\mathbb{V}$ のウェイトが $\{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{i<j} \cup \{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ に属するような T-固有空間の直和とすると、R^+ に対応する T を含む G の Borel 部分群 B は $\mathbb{V}^+$ を保つ事が分かる。従って $\mathcal{B}$ の B 上のファイバーが $\mathbb{V}^+$ で与えられる G-同変ベクトル束 $F := G \times^B \mathbb{V}^+$ を考える事ができる。

すると、次の写像を考える事ができる

$$F = G \times^B \mathbb{V}^+ \hookrightarrow G \times^B \mathbb{V} \cong \mathcal{B} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}.$$

この合成射を μ で表し、またその像を $\mathfrak{N}$ で表す。$\mathfrak{N}$ は $\mathbb{V}$ の Hilbert 冪零錐である事が知られている。各 $x \in \mathfrak{N}$ に対して $\mathcal{E}_x$ を $\mu^{-1}(x)$ の $\mathcal{B}$ への射影として定める。

Theorem 1.2 (exotic Springer 対応 [Ka09a] §8)**.** 任意の $x \in \mathfrak{N}$ に対して以下が成立*:*

1. 全ての $\mathcal{E}_x$ の既約成分は同じ次元 d_x を持つ。

2. 各整数 $i \geq 0$ について $H^{2i+1}(\mathcal{E}_x) = \{0\}$ かつ $H^{2i}(\mathcal{E}_x)$ には W-表現の構造が入る。

3. $L_x := H^{2d_x}(\mathcal{E}_x)$ は既約 W-表現となる。

4. 次の全単射が存在

$$\{x \mid x \in \mathfrak{N}\}/\sim \stackrel{1:1}{\leftrightarrow} \mathsf{Irr} W$$

ただし $x \sim x'$ とはある $g \in G$ により $x = gx'$ となる事と定める。

この構成で重要なのは通常の B/C 型の Springer 表現では $\xi \neq 1$ となる表現の一部分を考える必要があったのに対して我々の構成では ($\mathsf{Stab}_G x$ が連結であることから) そのような必要がない事である。

堀田-Springer の定理

さて、$\mathcal{B}_x$ や $\mathcal{E}_x$ といった多様体のコホモロジー群には W-表現の構造が入る事は既に見た。実は $x = 0$ という特別な場合には $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0$ であり、この多様体のコホモロジーには標準的に以下のような環構造 (から誘導される)W-加群構造が入り、Springer 表現はその構造と一致する。

Theorem 1.3 (Borel)**.** 環として次の同型が存在する

$$\mathbb{C}[\mathfrak{t}]/\mathbb{C}[\mathfrak{t}]\mathbb{C}[\mathfrak{t}]_+^W \xrightarrow{\cong} H^\bullet(\mathcal{B}).$$

但し、$\mathfrak{t}$ は T の *Lie* 代数で $\mathbb{C}[\mathfrak{t}]_+^W$ は正次数の W-不変多項式の集合である。また、各 $i \geq 0$ に対して左辺の次数 i 部分は右辺では次数 $2i$ 部分に対応する。

この状況で以下が成立する

Theorem 1.4 (堀田-Springer)**.** 自然な埋め込み $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ は W-表現としての全射

$$H^{2d_x}(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow H^{2d_x}(\mathcal{B}_x)_1$$

を誘導する。

堀田-Springer の定理は Springer の定理における W-表現の構造が自然なものであることを示しているが、$\xi \neq 1$ の場合については良くわからない。

§2. affine Hecke 環の標準加群と Springer 表現

各 $x \in \mathcal{N}$ と $\xi \in A_x$ に対して Springer 表現を

$$M_{(x,\xi)} := H^\bullet(\mathcal{B}_x)_\xi := \bigoplus_{i \geq 0} H^{2i}(\mathcal{B}_x)_\xi$$

で定義する。各 $M_{(x,\xi)}$ は $H^2(\mathcal{B})$ の元による (超平面による切断から来る) 作用を持ち、定理 1.3 よりこれは $\mathbb{C}[T]$ の作用に延びる。このとき、W の自然な $X(T)$ への作用を使うと $W \ltimes X(T)$ が $M_{(x,\xi)}$ に作用する事が分かる。

この作用は自然な q-類似を持ち、$M_{(x,\xi)}$ は affine Hecke 代数 $\mathbb{H}$ の作用を持つ (特に affine Hecke 代数 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}[q^{\pm 1}]$-代数であり $q \to 1$ という特殊化により群環 $\mathbb{C}[W \ltimes X(T)]$ と同型になるものである。詳しい定義は参考文献を参照)。この時 affine Hecke 代数の中心は $\mathbb{C}[T \times \mathbb{C}^\times]^W$ (但し W の作用は $\mathbb{C}^\times$ と同型) と同型なため、$Z(\mathbb{H})$ の 1 次元表現は $G \times \mathbb{C}^\times$ の半単純共役類と同一視される。$a = (s, q) \in T \times \mathbb{C}^\times$ の定める半単純共役類を a とおき、

$$\mathbb{H}_a := \mathbb{C}_a \otimes_{Z(\mathbb{H})} \mathbb{H}$$

を中心指標 a に対応する特殊化 affine Hecke 代数と呼ぶ。

$M_{(x,\xi)}$ に中心指標 $(s, q) \in G \times \mathbb{C}^\times$ の affine Hecke 代数の表現の構造を定めることができるための必要十分条件はある $g \in Z_G(s)$ が存在して $s\mathrm{Ad}(g)x = q\mathrm{Ad}(g)x$ を満たす事である。$M_{(x,\xi)}$ にこの作用を入れたものを $M_{(s,q,x,\xi)}$ と書き、標準 $\mathbb{H}$ 加群と呼ぶ。二つの標準 $\mathbb{H}$ 加群が同型になる必要十分条件は (s, x, ξ) と (s', x', ξ') の二つの 3 つ組が G 共役になる事である。

さて、各冪零元 $x \in \mathcal{N}$ に対して対応する $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{x, y, h\} \subset \mathfrak{g}$ を定める事ができる。この設定の下でさらに $[h, x] = (\log q)x$ となるように規格化すると $s = \exp h$ として $M_{(s,q,x,\xi)}$ は標準 $\mathbb{H}$ 加群を定める事が分かる。

Theorem 2.1 (Kazhdan-Lusztig [KL87] Theorem 8.2)**.** $q>1$ を実数とする。この時 $M_{(s,q,x,\xi)}$ は $\{0\}$ でなければ $\mathbb{H}$ の既約表現である。さらにこのように構成された $\mathbb{H}$ 加群の同型類と $\mathbb{H}$ の緩増加表現の同型類は 1 対 1 に対応する。

Lusztig により $q>0$ かつ s が G の任意の有限次元表現に対して正の実数を固有値に持つ時には $\mathbb{C}[W]\subset\mathbb{H}_a$ が成立する事が知られている。同様の議論からまた

$$M_{(s,q,x,\xi)}\cong\mathsf{sgn}\otimes M_{(x,\xi)}\text{ as }W\text{-modules}$$

が成立する事も分かる。従って Springer 表現とは affine Hecke 環の緩増加表現の W-指標の事であった。

§3. Springer 表現を記述するアルゴリズム

Lusztig-庄司アルゴリズム

Springer 表現を記述するアルゴリズムとして Lusztig-庄司アルゴリズムと呼ばれるものがある。このアルゴリズムは実際には $M_{(x,\xi)}$ ではなく各 $\chi\in\mathsf{Irr}W$ に対して

$$K_{\chi,(x,\xi)}(q):=\sum_{i\geq1}(-q)^{\frac{i}{2}}\dim\mathrm{Hom}_W(\chi,H^i(\mathcal{B}_x)_\xi)\in\mathbb{N}[q]$$

を計算する (この関数を Kostka 関数と呼ぶ。変数 q は不定元と思っても良いし、対応する Chevalley 群の基礎体の位数だと思っても良い。)。また、一番目の χ を省略して

$$K_{(x,\xi)}(q):=\sum_{\chi\in\mathsf{Irr}W}\sum_{i\geq1}(-q)^{\frac{i}{2}}(\dim\mathrm{Hom}_W(\chi,H^i(\mathcal{B}_x)_\xi))[\chi]\in K_0(W{-}\mathsf{mod})\otimes\mathbb{Z}[q]$$

も Kostka 関数と呼ぶ事がある (ここで $K_0(W{-}\mathsf{mod})=\mathbb{Z}\mathsf{Irr}W$ である)。ここで (x,ξ) と χ に関して行列

$$P:=\{K_{\chi,(x,\xi)}(q)\}_{\chi,(x,\xi)}$$

を考えるとこれは $\chi\leftrightarrow(y,\eta)$ という Springer 対応を通じて (0 になる行を省略して) 正方行列になる。行列 P は

$$Gx\subset\overline{Gy}\Rightarrow(x,\xi)>(y,\eta)$$

を満たす任意の $\mathsf{Irr}W$ の全順序を用いた表示に関して対角成分が $t^{\dim\mathcal{B}_x}$ となる上三角行列を成す事が知られている。さて、同様に行列 Ω を

$$\Omega_{\chi,\chi'}:=q^{\dim\mathcal{B}}\sum_{i\geq0}(-q)^{\frac{i}{2}}\dim\mathrm{Hom}_W(\chi\otimes\chi'\otimes\mathsf{sgn},H^i(\mathcal{B}))$$

によって定める。(これを fake degree という。定理 1.3 から fake degree は計算できる量である事が分かる。)

Theorem 3.1 (庄司 (古典型), Lusztig(より一般の場合)). ある $\mathbb{Q}(q)$ 多項式係数の行列 Λ であって $Gx \neq Gy$ ならば $\Lambda_{(x,\xi)(y,\eta)} = 0$ が成立する様なものが唯一存在して (ただし Springer 対応を用いて添字をペア (x,ξ) の形に揃えている)

$$P\Lambda{}^{\mathrm{t}}P = \Omega \tag{3.1}$$

が成立する。さらに、

$$Gx \neq Gy \Rightarrow \Lambda_{(x,\xi)(y,\eta)} = 0, Gy \not\subset \overline{Gx} \Rightarrow P_{(x,\xi)(y,\eta)} = 0, P_{(x,\xi)(x,\eta)} = \delta_{\xi,\eta} q^{d_x}$$

を満たすような $\mathbb{Q}(q)$ 行列で (3.1) を満たすものは唯一である。

Example 3.2 (A_1 型の場合). この状況下では $\mathsf{triv} < \mathsf{sgn}$ となり

$$\Omega = \begin{pmatrix} q^2 & q \\ q & q^2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & q \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

であり、

$$P\Lambda{}^{\mathrm{t}}P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + a^2 c & acq \\ acq & bq^2 \end{pmatrix} = \Omega$$

を解いて

$$\Lambda = \begin{pmatrix} q^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

を得る。

Example 3.3 (A_2 型の場合). この状況下では $\mathsf{triv} < \mathsf{ref} < \mathsf{sgn}$ となり (ただし ref は鏡映表現)

$$\Omega = q^3 \begin{pmatrix} q^3 & q + q^2 & 1 \\ q + q^2 & 1 + q + q^2 + q^3 & q + q^2 \\ 1 & q + q^2 & q^3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & q & c \\ 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix}$$

であり、(3.1) を解くと

$$\Lambda = \begin{pmatrix} q(q^2 - 1)(q^3 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (q+1)(q^3 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q & q + q^2 \\ 0 & 0 & q^3 \end{pmatrix}$$

を得る。

Example 3.4 (exotic B_2 型の場合). この状況下では表現の順序は

$$\mathsf{triv} < \mathsf{ref} < \mathsf{Ssgn}, \mathsf{Lsgn} < \mathsf{sgn}$$

となる事が知られている (ただし $\mathsf{Ssgn}, \mathsf{Lsgn}$ は各々short root/long root のみに関する符号表現もどき)。また、$\mathsf{Ssgn} < \mathsf{Lsgn}$ であるように順番を固定すると

$$\Omega = q^4 \begin{pmatrix} q^4 & q + q^3 & q^2 & q^2 & 1 \\ q + q^3 & 1 + 2q^2 + q^4 & q + q^3 & q + q^3 & q + q^3 \\ q^2 & q + q^3 & q^4 & 1 & q^2 \\ q^2 & q + q^3 & 1 & q^4 & q^2 \\ 1 & q + q^3 & q^2 & q^2 & q^4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & q & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & q^2 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix}$$

であり、(3.1) を解くと

$$\Lambda = \begin{pmatrix} q^8-q^6-q^4+q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^6-q^4-q^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^4-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^4-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & q & q & q & q+q^3 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix}$$

を得る。

Example 3.5 (通常の B_2 型の場合)**.** この状況下では表現の順序は

$$\mathsf{triv} < \mathsf{ref}, \mathsf{Ssgn} < \mathsf{Lsgn} < \mathsf{sgn}$$

となる事が知られている。ここで冪零軌道のレベルでは ref と Ssgn は同じ軌道に台を持っている。この時

$$\Omega = q^4 \begin{pmatrix} q^4 & q+q^3 & q^2 & q^2 & 1 \\ q+q^3 & 1+2q^2+q^4 & q+q^3 & q+q^3 & q+q^3 \\ q^2 & q+q^3 & q^4 & 1 & q^2 \\ q^2 & q+q^3 & 1 & q^4 & q^2 \\ 1 & q+q^3 & q^2 & q^2 & q^4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & q & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & q & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix}$$

であり、(3.1) を解くと

$$\Lambda = \begin{pmatrix} q^8-q^6-q^4+q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^6-q^2 & q^5-q & 0 & 0 \\ 0 & q^5-q & q^6-q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^4-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & q & 0 & q & q+q^3 \\ 0 & 0 & q & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^4 \end{pmatrix}$$

を得る。

このような (3.1) を中心とする構成の一般化として $\mathsf{Irr}W$ の半順序 $\succ$ と指数 $a : \mathsf{Irr}W \to \mathbb{N}$(通常の Springer 表現で d_x に対応する量) の組であって Kostka 関数もどきを一意的に決めるようなものががたくさんある事が庄司により示されている (そしてそれはより一般の鏡映群の一部にも拡張されている; 例えば [Sh02] を参照)。しかし、このような一般の Kostka 関数もどきが多項式になったり、さらにその q に関する係数が上の様に非負整数であったりする事は上のように幾何学的な構成に源泉を持つ場合を含む非常に特殊な場合にしか成立しないと考えられている。とはいえ、やはり庄司により適当な由緒正しい構成から来る Kostka 関数もどきは有理数係数の多項式になる事が示されている他は一般にはほとんど何も分かっていない。

別のアルゴリズム

さて、$M_{(x,1)}$ は常に $H_0(\mathcal{B})$ から誘導される自明表現を含む。この事から実は $G = Sp(2n)$ もしくは $SO(2n+1)$ の時に

$$M_{(x,1)} \cong \bigoplus_i H^i(\mathcal{E}_y) \text{ as } W\text{-modules}$$

となる $y \in \mathfrak{N}$ が存在する事が従う ([CK09] Corollary 1.23)。実際そこでは実質的に緩増加表現が sgn 表現を含めば対応する (古典型の一般化)Springer 表現は W 表現としてかな

らず exotic Springer 表現と同型になる事が示されている。したがって exotic Springer 表現が計算できると元々の Springer 表現も多くの場合に分かる。

では、そうでない場合を見てみよう。G が B_2 型の時には (x,ξ) で $\xi \neq 1$ となる Springer 表現は

$$K_{\mathsf{Ssgn}}(q) = q[\mathsf{Ssgn}]$$

のみである。また、これと同じ G-軌道に対応する (が $\xi = 1$ である)Kostka 関数は $K_{\mathsf{ref}}(q) = [\mathsf{triv}] + q[\mathsf{ref}]$ となる。これは Kostka 関数の exotic 類似を $K'_\chi(q)$ と書いた時の

$$K'_{\mathsf{Ssgn}}(q) = [\mathsf{triv}] + q[\mathsf{ref}] + q^2[\mathsf{Ssgn}], K'_{\mathsf{ref}}(q) = [\mathsf{triv}] + q[\mathsf{ref}]$$

の二つの項の差に良く似ている。これは偶然ではなく、この 2 つの Kostka 関数 $K_{\mathsf{Ssgn}}(q), K_{\mathsf{ref}}(q)$ に対応する (Springer 表現に対応する) 緩増加表現は我々が [CKK12] において "tempered delimit" と呼んでいる表現の族を成す事が知られている。そして同じ "tempered delimit" に属する表現はより小さなランクの緩増加表現の誘導表現の中に共に重複度 1 で出現しうるような表現であり、W-指標の間に (明示的に分かる項を法とした) 線形関係式がある事が分かっている。そこから

$$K_{\mathsf{Ssgn}}(1) = K'_{\mathsf{Ssgn}}(1) - K'_{\mathsf{ref}}(1) \tag{3.2}$$

のような奇麗な式が従っているというのが我々の観察である。

さらに考察を加える事により我々は Lusztig-庄司アルゴリズムとは異なる Kostka 関数の ($q = 1$ での値の) 計算アルゴリズムを構成したが、それをきちんと述べるにはよりたくさんの準備が必要なので割愛する ([CKK12] に書いてある)。そのアルゴリズムの証明には Opdam school の理論 [Op04, OS09a, OS09b] と我々の構成 [Ka09a, Ka09b, CK09] の比較が必要であった。ただし、(3.2) は $q \neq 1$ では成立せず、それを解消するにはどうすれば良いかは今後の課題である。

謝辞: ここにかかれた (我々の結果に関する) 共同研究者である Dan Ciubotaru 氏、この方向の可能性について示唆してくださった Eric Opdam 氏、話を聞いてくださった有木進氏、庄司俊明氏に感謝します。また、締め切りが重なってしまい迷惑をかけた別の研究に関する共同研究者の方々にお詫び申し上げます。

References

[CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, Representation theory and complex geometry. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. x+495 pp. ISBN 0-8176-3792-3.

[CK09] Dan Ciubotaru and Syu Kato, Tempered modules in the exotic Deligne-Langlands classification, Adv. Math. 226 (2011), no. 2, 1538–1590.

[CKK12] Dan Ciubotaru, Midori Kato (Shiota) and Syu Kato, On characters and formal degrees of discrete series of affine Hecke algebras of classical types, Invent. Math. 187 (2012), no. 3, 589–635.

[Ka09a] Syu Kato, An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups, Duke Math. J. 148 (2009), no. 2, 305–371.

[Ka09b] Syu Kato, Deformations of nilpotent cones and Springer correspondences, Amer. J. Math. 133 (2011), no. 2, 519–553.

[KL87] David Kazhdan and George Lusztig, Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, Invent. Math. 87 (1987), no. 1, 153–215.

[Lu84] George Lusztig, Intersection cohomology complexes on a reductive group, Invent. Math. 75 (1984), no. 2, 205–272.

[Op04] Eric Opdam, On the spectral decomposition of affine Hecke algebras, J. Inst. Math. Jussieu **3**(4) (2004), 531–648.

[OS09a] Eric Opdam and Maarten Solleveld, Homological algebra for affine Hecke algebras, Adv. in Math. 220 (2009), 1549–1601.

[OS09b] Eric Opdam and Maarten Solleveld, Discrete series characters for affine Hecke algebras and their formal degrees, Acta Math. 205 (2010), no. 1, 105–187.

[Sh02] Toshiaki Shoji, 複素鏡映群に付随した Green 関数について, 数学 54, (2002), 69 - 85.

[Sh04] Toshiaki Shoji, Deligne-Lusztig 指標を訪ねて, in 群論の進化, 朝倉書店 (2004).